



Zadania na XXIII Podkarpacki Konkurs Matematyczny im. Franciszka Lejki Poziom I

(klasy pierwsze liceum i technikum oraz klasy ósme szkoły podstawowej)

Etap powiatowy

17 lutego 2024 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Wyznacz, bez użycia kalkulatora, liczbę

$$a = 10101 \cdot \left(\frac{5}{111111} + \frac{5}{222222} - \frac{4}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} \right)$$

i sprawdź, czy liczba ta spełnia nierówność: $\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1} < \frac{3}{2}$.

2. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz stosunek odcinków, na jakie wysokość tego trójkąta padająca na przeciwprostokątną, dzieli tę przeciwprostokątną.
3. W I rundzie turnieju szachowego, podzielono wszystkich zawodników na dwie grupy, liczące odpowiednio n – osób i $(n + 1)$ – osób. Każdy z każdym, w swojej grupie, zagrał jeden mecz. Liczba wszystkich meczy, rozegranych w obu grupach była o 8 mniejsza od iloczynu liczebności obu grup. Ilu zawodników brało udział w I rundzie turnieju?
4. Dany jest trapez o podstawach $a = 20 \text{ cm}$ i $b = 10 \text{ cm}$, oraz ramionach $c = 5 \text{ cm}$ i $d = 3\sqrt{5} \text{ cm}$. Dwa takie trapezy ułożono na płaszczyźnie tak, że utworzyły równoległobok, w którym jedna z par boków równoległych to ramię d tego trapezu. Wykonaj odpowiedni rysunek i oblicz długość dłuższej przekątnej tego równoległoboku.
5. Sprawdź, czy dla wszystkich liczb takich, że $y = x - 1$, wyrażenie:
$$\frac{(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8)(x^{16} + y^{16})(x^{32} + y^{32})(x^{64} + y^{64})}{x^{128} - y^{128}}$$
ma stałą wartość.

Powodzenia!